

QUELQUES REMARQUES SUR LES COURBES DE GENRE 5

Jean D'ALMEIDA, Laurent GRUSON et Nicolas PERRIN

Introduction

Dans ce texte, nous nous intéressons à la géométrie des courbes de genre 5 et plus précisément aux courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe. Nous donnons deux caractérisations géométriques de l'existence d'une telle involution. La première de ces caractérisations, conjecturée dans [ACGH], est le point de départ de notre étude.

Considérons C une courbe de genre 5 non hyperelliptique et non trigonale plongée canoniquement dans \mathbb{P}_4 . Les quadriques qui la contiennent forment alors un réseau (c'est-à-dire que l'on a $h^0\mathcal{I}_C(2) = 3$). Dans le plan de ce réseau, les quadriques singulières forment une courbe Γ de degré 5. La géométrie de Γ et celle de C sont liées (cf. [ACGH] pp 270-274, nous rappellerons quelques résultats au premier paragraphe). En particulier, lorsque C est un revêtement double non ramifié d'une courbe de genre 3, la quintique Γ se décompose en la réunion d'une conique et d'une cubique. Les auteurs de [ACGH] posent la question de la réciproque : si la courbe Γ est la réunion d'une conique et d'une cubique, la courbe C est-elle revêtement double non ramifié d'une courbe de genre 3 ? Nous répondons par l'affirmative à cette question au premier paragraphe en montrant le théorème suivant,

THÉORÈME 0.1. — *La courbe C est revêtement double d'une courbe de genre 3 si et seulement si Γ est réunion d'une conique et d'une cubique,*

complétant ainsi l'étude de [ACGH]. Nous rappelons également, dans ce paragraphe, un isomorphisme birationnel entre \mathfrak{M}_5 (l'espace des modules des courbes de genre 5) et l'espace des modules des théta-caractéristiques supportées par une quintique plane.

Dans le second paragraphe nous revenons au point de départ de cette étude commune qui est un exposé de Jean d'Almeida au séminaire de géométrie algébrique de Jussieu dans lequel il cherchait à donner une réponse géométrique au problème précédent. Cette étude repose notamment sur la description des courbes lisses de degré 8 et de genre 5 de \mathbb{P}_3 qui ont une infinité de quadrisécantes. Nous reprenons en détail cette construction géométrique. Nous décrivons une correspondance birationnelle entre les courbes de genre 5 revêtement double non ramifié d'une courbe de genre 3 et les quintiques planes réunion d'une conique et d'une cubique modulo l'action du groupe d'Heisenberg H associé à la situation (théorème 2.7). Cette construction permet notamment de donner une nouvelle caractérisation géométrique des courbes de genre 5 non hyperelliptiques revêtement double non ramifié d'une courbe de genre 3. Notons $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ (resp. $\mathfrak{M}_5^{i,d}$) les courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe dont la variété de Prym associée est indécomposable (resp. décomposée).

THÉORÈME 0.2. — *Soit C une courbe lisse de genre 5.*

(1) Première caractérisation : *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement \mathcal{M} de degré 8 de C dans \mathbb{P}_3 pour lequel la courbe C a une infinité de quadrisécantes.*

Seconde caractérisation : *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement \mathcal{M}' de degré 7 de C dans \mathbb{P}_3 et une droite L rencontrant C en un point pour lesquels la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.*

Dans cette situation, la courbe Y des quadrisécantes est la même quelque soit le plongement, elle est lisse de genre 2 et telle que $J(Y) = \text{Prym}(C)$. Notons \mathfrak{J}_0 les diviseurs \mathcal{M} de degré 8 du premier type, \mathfrak{J}_1 les diviseurs \mathcal{M}' de degré 7 du second type et \mathfrak{J} la réunion de ces ensembles. Il y a un morphisme $\mathfrak{J} \rightarrow J(Y)$ qui est un fibré principal homogène de groupe H (le groupe d'Heisenberg de Y).

(11) *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,d}$ si et seulement s'il existe un morphisme de C dans \mathbb{P}_3 tel que son image \overline{C} est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques, de degré 8 et a deux points doubles aux sommets des cônes.*

Dans cette situation, notons \mathfrak{J} les diviseurs de degré 8 de C qui définissent de tels morphismes. On a un morphisme $\mathfrak{J} \rightarrow E_1 \times E_2$ qui est un fibré principal homogène de groupe H (les E_i sont les courbes elliptiques définissant les cônes cubiques et H le groupe d'Heisenberg associé à $E_1 \times E_2$).

Remerciements : Le troisième auteur remercie Atanas Iliev pour les nombreuses références qu'il lui a communiquées.

1 La construction de [ACGH]

Rappelons les principaux résultats décrits dans [ACGH] pp 270-274 : soit C une courbe de genre 5 non hyperelliptique plongée canoniquement dans \mathbb{P}_4 (on identifiera C à son image). Les quadriques contenant C forment un réseau, c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{C}}(H^0\mathcal{I}_C(2)) = h^0\mathcal{I}_C(2) = 3$.

1.1 Le cas trigonal

La courbe C est trigonale si et seulement si toutes les quadriques du réseau sont singulières. On ne peut dans ce cas définir la quintique Γ de l'introduction.

Dans toute la suite nous supposons que C n'est pas trigonale. On définit alors la courbe Γ comme lieu des quadriques singulières du réseau. C'est une quintique plane.

1.2 L'étude générale

Pour une courbe C générale, on vérifie que le réseau de quadriques est également général et que la courbe Γ est non singulière. Les singularités de Γ correspondent aux quadriques de rang 3 du réseau et Γ n'a que des points doubles ordinaires pour singularités (en particulier Γ n'a pas de composante multiple).

1.2.1 Les droites contenues dans Γ

Les droites contenues dans Γ sont en bijection avec les pinceaux bi-elliptiques de C (c'est-à-dire les morphismes de degré 2 de C vers une courbe elliptique). Il y en a donc au plus 5.

1.2.2 Les coniques de Γ

On passe enfin au cas où la courbe Γ se décompose en une conique et une cubique. Supposons tout d'abord que C est une revêtement double non ramifié d'une courbe X de genre 3. On montre alors que Γ est réunion d'une cubique C_1 et d'une conique C_0 .

Pour donner une caractérisation des courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe, nous montrons la réciproque :

THÉORÈME 1.1. — *Si Γ est réunion d'une conique C_0 et d'une cubique C_1 , alors la courbe C est revêtement double non ramifié d'une courbe X de genre 3.*

Donnons une autre présentation classique du problème par les réseaux de quadriques de \mathbb{P}_4 . Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^3, S^2\mathbb{C}^5)^\vee)$ sur lequel agissent les groupes PGL_3 et PGL_5 . Dans cet espace projectif considérons l'ouvert U des $\varphi \in \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^3, S^2\mathbb{C}^5)^\vee)$ tels que

- (i) $\varphi : \mathbb{C}^3 \rightarrow S^2\mathbb{C}^5$ est injective (pour qu'on ait un vrai réseau de quadriques),
- (ii) $\det(\varphi)$ est non nul (vu comme déterminant d'une matrice symétrique de taille 5×5 à coefficients dans \mathbb{C}^{3^\vee}),
- (iii) aucune quadrique du réseau n'est dégénérée en deux plans,
- (iv) l'intersection dans \mathbb{P}_4 des quadriques du réseau forme une courbe lisse de genre 5.

On s'intéresse maintenant aux actions de PGL_3 et PGL_5 sur U .

FAIT 1.2. — *L'action de PGL_3 est libre et tous les points de U sont stables pour cette action.*

Preuve — Ceci vient simplement de la condition (i). Le quotient est alors un ouvert de $\mathbb{G}(3, S^2\mathbb{C}^5)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $S^2\mathbb{C}^5$. \square

LEMME 1.3. — *Les points de U sont stables pour l'action de PGL_5 .*

Preuve — En effet, C.T.C Wall a étudié la stabilité des réseaux de quadriques dans \mathbb{P}_n (théorème 0.1 de [W1]). En particulier, il montre que si un point φ est non stable, alors la courbe de \mathbb{P}_2 définie par le déterminant $\det(\varphi)$ a une composante multiple (corollaire 2, [W1]). Ceci ne peut jamais arriver dans notre situation : on sait que la courbe C de genre 5 intersection des quadriques du réseau est lisse et dans ce cas la courbe Γ (cf. construction de [ACGH]) qui a pour équation $\det(\varphi)$ n'a pas de composante multiple. \square

Les deux quotients géométriques $\mathfrak{U}_3 = U/PGL_3$ et $\mathfrak{U}_5 = U/PGL_5$ sont munis respectivement d'une action de PGL_5 et PGL_3 . Par un résultat de C. T. C. Wall [W2], comme tous les points de U sont stables pour les deux actions, ils sont tous stables pour l'action de $PGL_3 \times PGL_5$ et les deux quotients \mathfrak{U}_3/PGL_5 et \mathfrak{U}_5/PGL_3 sont isomorphes au quotient $U/(PGL_3 \times PGL_5)$.

Nous donnons deux interprétations de ces deux quotients. Notons $\Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{reg}$ l'ouvert de la variété des théta-caractéristiques planes (cf. [S] pour son existence en toute généralité) supportées par une courbe de degré 5 régulières (c'est-à-dire $h^0\theta = 0$).

PROPOSITION 1.4. — *La variété \mathfrak{U}_5 est isomorphe à l'ouvert Θ_0 de $\Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{reg}$ correspondant aux conditions (u) et (v).*

Preuve — On a un morphisme naturel de $\Psi : U \rightarrow \Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{reg}$ donné de la manière suivante : si $\varphi \in U$, alors on définit un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ par le conoyau θ de la flèche

$$(\mathbb{C}^5)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \quad (*)$$

qui est évidemment une théta-caractéristique régulière supportée par une courbe de degré 5. Le morphisme est bien défini sur tout U et la flèche $(*)$ est toujours injective car le déterminant $\det(\varphi)$ n'est jamais nul. Ce morphisme est évidemment invariant sous PGL_5 .

Ce morphisme est surjectif sur l'ouvert Θ_0 . En effet, si $\theta \in \Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{reg}$, alors la suite spectrale de Beilinson (cf. [OSS]) nous donne la suite spectrale suivante :

$$E_1^{i,j} = H^j\theta(1-i) \otimes \Omega_{\mathbb{P}_2}^i(i) \implies \theta(1) \text{ en degré } 0.$$

Ici tous les termes sont nuls sauf $E_1^{0,0}$ et $E_1^{2,1}$ ce qui nous donne la résolution :

$$0 \rightarrow H^1\theta(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \xrightarrow{\varphi} H^0\theta(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow \theta(1) \rightarrow 0$$

où φ est symétrique car θ est une théta-caractéristique, donc on peut voir φ comme un élément de U (car $\theta \in \Theta_0$) en fixant des bases duales de $H^1\theta(-1)$ et $H^0\theta(1)$.

Il reste à montrer que les fibres sont les orbites pour l'action de PGL_5 sur U . Or les éléments $\varphi \in U$ de la fibre au-dessus de $\theta \in \Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{reg}$ sont les matrices symétriques 5×5 tel que le quotient du morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ -module $(*)$ est θ . On peut alors identifier \mathbb{C}^5 à $H^0\theta(1)$ et φ est uniquement donnée à action de PGL_5 près par la surjection $H^0\theta(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \rightarrow \theta(1)$. \square

Notons $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_4,(8,5)}^{lisses,nd,nt}$ le schéma de Hilbert des courbes lisses de degré 8 et de genre 5 de $\mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ non dégénérées (c'est-à-dire non contenues dans un hyperplan) et non trigonales.

PROPOSITION 1.5. — *On a un isomorphisme $\mathfrak{U}_3 \simeq \text{Hilb}_{\mathbb{P}_4,(8,5)}^{lisses,nd,nt}$.*

Preuve — On a un morphisme $\Phi : U \rightarrow \text{Hilb}_{\mathbb{P}_4,(8,5)}^{lisses,nd,nt}$ invariant sous PGL_3 donné par l'intersection des quadriques du réseau. Ce morphisme est bien à valeur dans $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_4,(8,5)}^{lisses,nd,nt}$ grâce aux hypothèses faites sur U (en particulier comme toutes les quadriques ne sont pas singulières — i.e. $\det(\varphi) \neq 0$ — la courbe n'est pas trigonale). Il est surjectif car toute courbe lisse C de \mathbb{P}_4 de degré 8 et de genre 5, non dégénérée est plongée canoniquement et C est nécessairement non hyperelliptique. On a alors $h^0\mathcal{I}_C(2) = 3$ ce qui donne un réseau de quadriques $\varphi \in U$ et la courbe est l'intersection des quadriques du réseau.

Cette construction montre que les fibres au-dessus de $C \in \text{Hilb}_{\mathbb{P}_4,(8,5)}^{lisses,nd,nt}$ sont exactement données par les orbites sous $PGL(H^0K_C)$ c'est-à-dire sous PGL_5 . \square

Notons \mathfrak{M}_5^0 l'ouvert de l'espace des modules des courbes lisses de genre 5 formé des courbes non hyperelliptiques et non trigonales.

COROLLAIRE 1.6. — *On a un isomorphisme $\mathfrak{M}_5^0 \simeq \Theta_0/PGL_3$.*

Preuve — Comme on sait que $\mathfrak{U}_3/PGL_5 \simeq \mathfrak{U}_5/PGL_3$, il suffit de constater que l'on a $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_4, (8,5)}^{\text{lisses, nd, nt}}/PGL_5 \simeq \mathfrak{M}_5^0$. Cette correspondance birationnelle entre \mathfrak{M}_5 et $\Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{\text{reg}}/PGL_3$ est déjà décrite dans [ACGH], ch VI, appendix C, théorème page 301. Nous montrons ici simplement qu'elle est définie sur tout \mathfrak{M}_5^0 c'est-à-dire dès que la courbe est non hyperelliptique et non trigonale. Remarquons par ailleurs que cette description est utilisée dans [K] pour montrer que la variété \mathfrak{M}_5^i des courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe est rationnelle. \square

Nous revenons maintenant au théorème 1.1.

Preuve du théorème 1.1. — Il s'agit de montrer que si C est une courbe de genre 5 telle que la courbe Γ (définie au paragraphe 1.1) se décompose en une conique C_0 et une cubique C_1 , alors la courbe C est un revêtement double non ramifié d'une courbe X lisse de genre 3. Nous montrons grâce à la description précédente le lemme suivant qui est le nouvel ingrédient permettant la démonstration du théorème 1.1 :

LEMME 1.7. — *Il existe un élément $\varphi \in \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^3, S^2\mathbb{C}^5)^\vee)$ qui s'envoie sur $C \in \mathfrak{M}_5^0$ par Φ et tel que dans des bases de \mathbb{C}^5 la matrice de φ peut s'écrire sous la forme diagonale par blocs*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A est une matrice symétrique de taille 2×2 à coefficients dans $(\mathbb{C}^3)^\vee$ (dont le déterminant donne une équation de C_0) et B est une matrice symétrique de taille 3×3 à coefficients dans $(\mathbb{C}^3)^\vee$ (dont le déterminant donne une équation de C_1).

Preuve — Il s'agit donc de montrer que toutes les théta-caractéristiques $\theta \in \Theta_{\mathbb{P}_2,5}^{\text{reg}}$ ayant pour support $C_0 \cup C_1$ peuvent être définie à partir d'une matrice de cette forme.

Soit θ une telle théta-caractéristique et supposons que la conique C_0 est lisse. Nous savons (cf. 1.2) que les quadriques de rang 3 du réseau correspondent exactement aux points singuliers du support de θ (qui a seulement des points doubles ordinaires). La fibre du faisceau θ est donc de dimension 0 en général sur \mathbb{P}_2 , de dimension 1 pour un point général de $C_0 \cup C_1$ et de dimension 2 aux six points d'intersection de C_0 et C_1 (et éventuellement en un point singulier de C_1). Notons Z le schéma de cette intersection et considérons la restriction de la résolution de θ

$$0 \rightarrow (\mathbb{C}^5)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \rightarrow \theta \rightarrow 0$$

à la conique C_0 . On a alors :

$$0 \rightarrow \underline{\text{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}}(\theta, \mathcal{O}_{C_0}) \rightarrow (\mathbb{C}^5)^\vee \otimes \mathcal{O}_{C_0}(-2) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{C_0}(-1) \rightarrow \theta|_{C_0} \rightarrow 0.$$

Nous identifions C_0 à \mathbb{P}_1 , il existe alors deux entiers a et b tels que la suite exacte précédente s'écrive :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-b) \rightarrow (\mathbb{C}^5)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a) \oplus \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Cependant le morphisme central est symétrique par hypothèse donc si on applique le foncteur $\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}(\bullet, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-6))$, on a la même suite exacte. Ceci impose en particulier la relation $a = b - 6$. Par ailleurs un calcul de classes de Chern impose que $a + b = 4$. Ainsi on a $a = -1$ et $b = 5$.

Nous identifions maintenant le faisceau Q image de la flèche φ . C'est un faisceau localement libre de rang 4. Il s'écrit donc $Q \simeq \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a_i)$ avec a_i des entiers compris entre 2 et 4. Par ailleurs, la symétrie de la flèche φ impose que Q vérifie la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow Q \rightarrow Q^\vee(-6) \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0.$$

Ceci impose la condition $\sum_i a_i = 15$ et on a $Q \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4)^3$. Il existe donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 isomorphe à $H^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3)$ contenu dans $(\mathbb{C}^5)^\vee$ et de façon duale un quotient de rang 2 de \mathbb{C}^5 isomorphe à $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$.

Considérons la flèche $Q \xrightarrow{M} Q^\vee(-6)$ qui dans des décompositions de Q et $Q^\vee(-6)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (nous verrons en fin de preuve que le cas $\alpha = 0$ est impossible), β est une matrice 1×3 à coefficients dans $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ et γ est une matrice 3×3 à coefficients dans $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$. En jouant sur les décompositions de Q c'est-à-dire en faisant agir le groupe

$$\text{Aut}(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*, \mu \in GL_3(\mathbb{C}) \text{ et } u \text{ est à coefficients dans } H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \right\},$$

on peut trouver une décomposition dans laquelle M s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} \text{ où } \gamma' \text{ est une matrice } 3 \times 3 \text{ à coefficients dans } H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2).$$

La flèche φ peut être écrite de la manière suivante :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4)^5 \rightarrow Q \xrightarrow{M} Q^\vee(-6) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)^5.$$

On fixe la décomposition précédente de Q , il existe une décomposition de \mathbb{C}^5 sous la forme $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \oplus \mathbb{C}^3$ (et donc de $(\mathbb{C}^5)^\vee$ sous la forme $H^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3) \oplus \mathbb{C}^3$) telle que la flèche de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4)^5$ dans Q soit de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

où m est l'application canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4) \otimes H^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3)$ et I_3 est la matrice identité de taille 3×3 . La flèche de $Q^\vee(-6)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)^5$ est la transposée de cette flèche. La composée est alors dans ces décompositions de la forme :

$$\begin{pmatrix} m {}^t m & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix}$$

où m et γ' sont les matrices définies ci-dessus. C'est une matrice à coefficients dans

$$H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \simeq H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) = (\mathbb{C}^3)^\vee$$

et nous avons bien la forme diagonale par blocs recherchée.

Si le morphisme $\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3)$ est nul, alors la conique est singulière. En effet le même raisonnement donne alors une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t m \beta \\ {}^t \beta m & \gamma' \end{pmatrix}.$$

Mais $\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4)^3 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-3)$ peut se mettre sous la forme $\beta = (0, \beta_1, \beta_2)$ avec β_1 et β_2 dans $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$. Si on écrit $\beta' = (\beta_1, \beta_2)$ on a une matrice de la forme (ici $s \in H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & {}^t m \beta \\ 0 & s & * \\ {}^t \beta m & * & * \end{pmatrix}$$

dont le déterminant a $\det({}^t m \beta)$ comme facteur double. C'est impossible.

Dans le cas où la conique est singulière, on raisonne de la même manière en se restreignant aux deux droites. Dans ce cas, la matrice A peut en plus se diagonaliser. \square

Nous terminons maintenant la preuve du théorème 1.1. La courbe C de genre 5 est l'intersection d'un réseau de quadriques diagonalisables par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Nous munissons C d'une involution : considérons la symétrie de \mathbb{P}_4 donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

elle laisse le réseau et la courbe C invariants. Il reste à vérifier que cette involution est sans point fixe. Sur C les points fixes sont les points d'intersection de la courbe avec la droite ou le plan définis par la décomposition de \mathbb{C}^5 . Les points fixes sont donc donnés par les points base du réseau A de quadriques de \mathbb{P}_1 ou du réseau B de quadriques planes. Pour le réseau A , il n'y a pas de tels points car la conique définie par le déterminant serait alors une droite double. Pour le réseau B , la formule d'Hürwitz nous dit que le nombre de points fixes est multiple de 4. Or un réseau de coniques a au plus 3 points base, l'involution est donc sans point fixe. \square

Nous pouvons alors compléter le tableau de [ACGH] page 274 qui résume les liens entre la géométrie de C et celle de Γ (Θ_{sing} est le lieu singulier du diviseur thêta de la jacobienne de C) :

- C est trigonale $\Leftrightarrow \Gamma = \mathbb{P}_2 \Leftrightarrow \Theta_{sing}$ est la réunion de deux copies de C conjuguées sous l'involution et qui se rencontrent en deux points,
- C n'est pas trigonale $\Leftrightarrow \Gamma$ est une quintique plane $\Leftrightarrow \Theta_{sing}/-1 = \Gamma$,
- C est bi-elliptique $\Leftrightarrow \Gamma$ contient une droite $\Leftrightarrow \Theta_{sing}$ contient une composante elliptique qui est un revêtement double de la droite,
- C est revêtement double d'une courbe de genre 3 $\Leftrightarrow \Gamma$ contient une conique $\Leftrightarrow \Theta_{sing} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ les deux composantes se coupant en six points avec $p_a(\Sigma_1) = 2$ et $p_a(\Sigma_2) = 4$,

- C n'est pas trigonale et n'a pas de pinceau semi-canonique $\Leftrightarrow \Gamma$ est une quintique plane lisse $\Leftrightarrow \Theta_{\text{sing}}$ est irréductible et lisse de genre 11.

Notons $\Theta_0^{3,2}$ le fermé de Θ_0 formé des théta-caractéristiques dont le support est la réunion d'une conique et d'une cubique et notons \mathfrak{M}_5^i le localement fermé de l'espace des modules des courbes de genre 5 formé des courbes non hyperelliptiques et non trigonales qui sont munies d'une involution sans point fixe. Le théorème 1.1 et le corollaire 1.6 permettent de montrer le

COROLLAIRE 1.8. — *On a un isomorphisme entre \mathfrak{M}_5^i et $\Theta_0^{3,2}$.*

REMARQUES 1.9. — (1) Ce corollaire permet de redémontrer le résultat de P.I. Katsylo [K] sur la rationalité de \mathfrak{M}_5^i . En effet, $\Theta_0^{3,2}$ est le produit de la variété des coniques planes qui est évidemment rationnelle par la variété des cubiques planes munies d'une théta-caractéristique paire qui est elle aussi rationnelle (cf. [DK] corollaire 5.7.2).

(ii) Nous allons dans la suite étudier une autre description de \mathfrak{M}_5^i . Nous remarquons ici que si C est une courbe lisse de genre 5 non hyperelliptique munie d'une involution sans point fixe i , alors C est non trigonale.

En effet, supposons que C soit trigonale. Soit D un g_3^1 sur C , si D est invariant par i (i.e. $i^*D = D$), alors l'involution i induit une involution sur \mathbb{P}_1 par le morphisme déduit de D . Cette dernière a nécessairement au moins un point fixe. La fibre du morphisme au-dessus d'un point fixe étant stable par i et formée de trois points, elle a au moins un point fixe par i ce qui est absurde. Si D n'est pas fixé par l'involution, soit $D' = i^*D$. On peut alors regarder le morphisme

$$C \rightarrow \mathbb{P}(H^0 D) \times \mathbb{P}(H^0 D') = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}(H^0 D \otimes H^0 D') = \mathbb{P}_3.$$

L'image de C est une courbe de bidegré $(3, 3)$ dans la quadrique, c'est-à-dire une courbe de genre arithmétique 4, c'est impossible car C est de genre 5.

2 Une tentative d'interprétation géométrique

Dans ce paragraphe nous décrivons d'une nouvelle manière l'espace de module des courbes de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3 grâce aux quintiques planes réunion d'une conique et d'une cubique.

Remarquons tout d'abord que si C est une courbe de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3, elle est alors munie d'une involution i sans point fixe. La jacobienne de C est, elle aussi, munie d'une involution toujours notée i et on note $\text{Prym}(C, i) = \text{Im}(i - 1)$ la variété de Prym associée (cf. par exemple [ACGH] ch. VI appendix C ou [Mu4]). C'est alors une surface abélienne principalement polarisée. On a alors un morphisme

$$\text{Prym} : \mathfrak{M}_5^i \rightarrow \mathfrak{A}_2$$

où \mathfrak{A}_2 est l'espace de modules (grossier) des surfaces abéliennes principalement polarisées. L'image d'une courbe C est en général une surface abélienne indécomposable, c'est alors la jacobienne d'une courbe Y de genre 2. Nous notons $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ l'ouvert de \mathfrak{M}_5^i correspondant à ce cas. Dans le

cas contraire, la variété de Prym est le produit de deux courbes elliptiques et nous notons $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ le fermé correspondant (le premier cas correspond à une conique irréductible contenue dans Γ alors que dans le second cas la conique est décomposée en deux droites).

Nous commençons par décrire la fibre de ce morphisme. Elle a été étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple [Do1], [Do2], [DS] et [V]). En particulier A. Verra [V] décrit complètement cette fibre (en incluant les revêtement admissibles introduits par [B1]). Nous incluons une preuve de ses résultats dans le cas des revêtements de courbes lisses et décrivons plus en détail le cas d'un produit de courbes elliptiques.

Nous aurons besoin de quelques rappels sur les courbes de genre 2, leur jacobienne et la surface de Kummer associée. Pour plus de détails, voir [Hu] ou [Mu2].

2.1 Notations et rappels

Soit $A \in \mathfrak{A}_2$ une surface abélienne principalement polarisée et soit Θ_A son diviseur thêta. Ce diviseur définit un morphisme

$$A \rightarrow \mathbb{P}(H^0(2\Theta_A)) \simeq \mathbb{P}_3.$$

L'image \mathcal{K} de ce morphisme est de quotient $A/\text{Aut}(\Theta_A)$.

Si A est indécomposable cette image est la surface de Kummer $\mathcal{K} \simeq J(Y)/-1$ associée à la courbe Y de genre 2 telle que $J(Y) = A$. Si A est décomposable isomorphe au produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$, alors le morphisme est de degré 4 et l'image est une quadrique lisse de \mathbb{P}_3 .

Le groupe H des éléments d'ordre 2 de A est fini d'ordre 16 isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Ce groupe est le quotient du groupe d'Heisenberg \mathcal{H} à 32 éléments par son centre (cf. [Mu2] ou [Mu3]). Par abus de notation nous l'appellerons encore groupe d'Heisenberg associé à A . Il agit linéairement sur \mathbb{P}_3 et laisse stable la surface \mathcal{K} .

Notons Z son image dans \mathcal{K} . Dans le premier cas Z est l'ensemble des points doubles de \mathcal{K} et H est le groupe des automorphismes de \mathcal{K} (ils laissent nécessairement fixe Z voir [Hu] ou [Mu2] p. 353). Dans le second cas, on a une involution i_k donnée par le diviseur $2\Theta_{E_k}$ sur chacune des courbes E_k . Le lieu de ramification sur \mathcal{K} du morphisme $A \rightarrow \mathcal{K}$ est la réunion de 4 droites de chaque famille. L'ensemble Z est le groupe de 16 points obtenus comme intersection de ces droites. Le groupe H est le sous-groupe du groupe des automorphismes de \mathcal{K} laissant stable Z .

Remarquons que l'on a une involution $i_1 \times i_2$ sur A . Notons $\tilde{\mathcal{K}}$ le quotient de A par cette involution. On a alors une suite de morphismes de degré 2 $A \rightarrow \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{K}$. Le premier est ramifié au dessus de l'image réciproque de Z dans $\tilde{\mathcal{K}}$ alors que le second est ramifié au dessus des quatres droites de chaque famille.

Notons $U(A)$ l'ouvert de \mathbb{P}_3^\vee — invariant sous H — des plans de \mathbb{P}_3 qui ne sont pas tangents à la surface \mathcal{K} et ne passant pas par un point de Z . Notons $\mathcal{K}^\vee \subset \mathbb{P}_3^\vee$ la surface de duale de \mathcal{K} et Z^\vee la réunion des 16 plans duaux des 16 points de Z . L'ouvert $U(A)$ est \mathbb{P}_3^\vee privé de $\mathcal{K}^\vee \cup Z^\vee$.

2.2 Lien entre C et A

PROPOSITION 2.1. — *On a un isomorphisme*

$$U(A)/H \simeq \mathrm{Prym}^{-1}(A).$$

Preuve — Nous commençons par associer à tout point de $x \in U(A)$ une courbe lisse de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3. Le point x est dans \mathbb{P}_3^\vee , il définit donc un plan x^\vee de \mathbb{P}_3 qui rencontre donc \mathcal{K} en une courbe lisse \tilde{X} (car $x \in U(A)$).

Dans le premier cas, la courbe $X = \tilde{X}$ est une quartique lisse donc de genre 3. Considérons la courbe $C \subset A$ image réciproque de \tilde{X} par le morphisme $A \rightarrow \mathcal{K}$. La courbe C est un revêtement double de X . Il est non ramifié car X évite les points doubles de \mathcal{K} .

Dans le second cas, la courbe \tilde{X} est une conique lisse. Considérons encore la courbe $C \subset A$ image réciproque de \tilde{X} par le morphisme $A \rightarrow \mathcal{K}$. On peut par ailleurs relever \tilde{X} en X dans $\tilde{\mathcal{K}}$. Ce relèvement est ramifié en 8 points. La courbe X est donc lisse de genre 3. Comme $x \in U(A)$ le morphisme induit de $A \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ donne un revêtement non ramifié $C \rightarrow X$.

La classe d'isomorphisme de C ne dépend pas du représentant x de \bar{x} : si on change de représentant, la courbe C est translatée par un élément α d'ordre 2 dans A et la courbe \tilde{X} est obtenue par la transformation linéaire correspondante dans \mathbb{P}_3 . Nous verrons en fin de démonstration pourquoi C est non hyperelliptique.

Réciproquement soit $C \in \mathrm{Prym}^{-1}(A)$ et X le quotient de C par l'involution. Fixons ξ un diviseur de degré 1 sur C tel que $2\xi = 2i(\xi)$ (il suffit de prendre ξ tel que $2\xi = x_0 + i(x_0)$ avec $x_0 \in C$, ce qui existe toujours car une variété abélienne est divisible). Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} C &\rightarrow A \\ x &\mapsto (1 - i)(x - \xi) \end{aligned}$$

obtenu en composant l'injection de C dans $J(C)$ donnée par $x \mapsto x - \xi$ avec la flèche $1 - i$ de $J(C)$ dans A .

LEMME 2.2. — *Le morphisme $C \rightarrow A$ est une immersion.*

Preuve — Nous commençons par montrer l'injectivité de la flèche. Soient x et y dans C tels que leurs images soient les mêmes dans A . On a alors $x - i(x) = y - i(y)$. Posons $D = x + i(y)$, c'est un diviseur de degré 2 sur C et on a $D = i(x) + y$. Si $x \neq y$, le diviseur D a au moins 2 sections (car les paires $\{x, i(y)\}$ et $\{i(x), y\}$ ne peuvent être égales). Dans ce cas la courbe C a un diviseur de degré 2 avec au moins 2 sections donc C est hyperelliptique. C'est absurde d'où l'injectivité de la flèche.

Il reste à prouver que l'application tangente est également injective. Nous avons vu que le morphisme $C \rightarrow A$ se factorise par la flèche $1 - i : J(C) \rightarrow A$. Considérons l'application

$$f : C \rightarrow \mathbb{P}(T_0 J(C))$$

définie par : soit $x \in C$ et soit v_x un vecteur tangent à C en x , alors $f(x)$ est le translaté en 0 de l'image de v_x par la différentielle de l'application $C \rightarrow J(C)$ définie par $x \mapsto x - \xi$.

L'application f est exactement le plongement canonique de C (voir par exemple [ACGH] exercices A-5 et A-6 p. 263). Le noyau en chaque point de la différentielle de

$$J(C) \rightarrow A$$

$$\xi \mapsto (1-i)(\xi)$$

est donné par l'espace tangent de la jacobienne $J(X)$ de X . L'application tangente de $C \rightarrow A$ est injective si et seulement si la courbe C dans son plongement canonique ne rencontre pas l'espace projectif correspondant à $\mathbb{P}(T_0 J(X))$. Ce dernier est le plan projectif associé au sous-espace propre pour la valeur propre 1 de l'involution i sur C . La courbe C ne rencontre jamais ce plan car l'involution i est sans point fixe. L'application tangente est donc injective. \square

La courbe C est donc plongée dans A et est invariante par l'involution $x \mapsto -x$ de A qui correspond à l'involution i sur C . Soit alors \tilde{X} l'image de C dans $\mathcal{K} \subset \mathbb{P}_3$. Il nous suffit de montrer que \tilde{X} est une section hyperplane (de degré 4 ou 2 selon les cas). Cependant comme le degré du morphisme est 2 ou 4 selon les cas, il suffit de montrer que

$$C \cdot (1-i)^*(2\Theta_A) = 8.$$

Fixons quelques notations, si J est une variété abélienne principalement polarisée, nous notons \hat{J} sa duale, Θ son diviseur thêta et $\lambda_\Theta : J \rightarrow \hat{J}$ l'isomorphisme associé. Dans notre situation, on a un morphisme $J(X) \xrightarrow{\pi^*} J(C)$ et on peut définir

$$\psi = \lambda_{\Theta_X}^{-1} \circ \widehat{\pi^*} \circ \lambda_{\Theta_A} : J(C) \rightarrow J(X).$$

On a également le morphisme d'inclusion $j : A \rightarrow J(C)$ et le morphisme $1-i : J(C) \rightarrow A$. On peut alors définir les morphismes

$$\sigma = \pi^* \times j : J(X) \times A \rightarrow J(C) \quad \text{et} \quad \tau = \psi \times (1-i) : J(C) \rightarrow J(X) \times A$$

et on a (cf. [Mu4]) $\sigma \circ \tau = 2 \cdot \text{Id}_C$.

FAIT. — On a $4\Theta_C = 2(1-i)^*\Theta_A + 2\psi^*\Theta_X$.

Preuve — Dans [Mu4], D. Mumford montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} J(X) \times A & \xrightarrow{\lambda_{2\Theta_X} \times \lambda_{2\Theta_A}} & \widehat{J(X)} \times \hat{A} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \hat{\sigma} \\ J(C) & \xrightarrow{\lambda_{\Theta_C}} & \widehat{J(C)} \end{array} .$$

La composée $J(C) \xrightarrow{\tau} J(X) \times A \xrightarrow{\lambda_{2\Theta_X} \times \lambda_{2\Theta_A}} \widehat{J(X)} \times \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}} \widehat{J(C)}$ est donc $J(C) \xrightarrow{\lambda_{4\Theta_C}} \widehat{J(C)}$. \square

On peut calculer notre intersection. En effet, on sait que $C \cdot \Theta_C = g(C) = 5$. Par ailleurs, la restriction de ψ à C est le morphisme π donc $C \cdot \psi^*\Theta_X = 2X \cdot \Theta_X = 2g(X) = 6$. Ainsi on a

$$C \cdot (1-i)^*(2\Theta_A) = 4C \cdot \Theta_C - C \cdot 2\psi^*\Theta_X = 8.$$

Il reste à montrer que dans la première construction la courbe C n'est pas hyperelliptique. Si elle était hyperelliptique, son image par f serait alors une courbe rationnelle normale C_4 de degré 4 de \mathbb{P}_4 . L'involution descendrait alors sur C_4 (la courbe C_4 est l'image du plongement canonique et est donc invariante par i). Mais alors la courbe rationnelle rencontrerait l'espace propre associé à la valeur propre 1. Ceci impose que l'application tangente de C vers A serait non injective en un point. La courbe $C \in A$ aurait alors un cusp ce qui est absurde. \square

Au-dessus de \mathfrak{A}_2 , on a un fibré projectif de dimension 3 donné par $\mathbb{P}(H^0(2\Theta_A)^\vee)$ au-dessus de A . On note $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}_2)$ l'ouvert donné dans chaque fibre au-dessus de A par $U(A)$. Au-dessus de \mathfrak{A}_2 , on a aussi une fibration \mathfrak{H} en groupes d'ordre 16 correspondant au-dessus de A au groupe d'Heisenberg H des éléments d'ordre 2 de A . On a une action fibre à fibre de \mathfrak{H} sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}_2)$.

COROLLAIRE 2.3. — *La variété \mathfrak{M}_5^i des courbes de genre 5 lisses non hyperelliptiques et munies d'une involution sans point fixe est isomorphe au quotient $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}_2)/\mathfrak{H}$.*

2.3 Lien avec les courbes planes de degré 5

Dans la situation précédente et pour $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$, la variété abélienne $A = \text{Prym}(C)$ est la jacobienne d'une courbe Y de genre 2. Choisissons H' un des 16 plans tangents à \mathcal{K}^\vee selon une conique. Le plan H' est tangent à \mathcal{K} le long de la conique C_2 image du plongement de Veronese de $\mathbb{P}(H^0(K_Y))$. Ce plan est donc isomorphe à $\mathbb{P}(S^2 H^0(K_Y))$. La conique C_2 contient 6 points doubles de la surface \mathcal{K}^\vee (que nous notons x_k pour $k \in [1, 6]$).

PROPOSITION 2.4. — *La donnée d'un point $x \in \mathbb{P}_3^\vee$ est équivalente à la donnée d'une cubique de H' passant par les six points x_k pour $k \in [1, 6]$.*

Preuve — À un point $x \in \mathbb{P}_3^\vee$ nous pouvons associer la surface cubique W polaire de \mathcal{K}^\vee . Cette surface cubique contient en particulier les points doubles de \mathcal{K}^\vee . Son intersection avec le plan H' définit une cubique C' qui passe par les 6 points x_k pour $k \in [1, 6]$.

Nous décrivons cette application. On prend des coordonnées (X, Y, Z, T) dans \mathbb{P}_3^\vee . Soit F l'équation de \mathcal{K}^\vee et X l'équation de H' . Nous écrivons alors

$$F = \lambda X^4 + X^3 F_1 + X^2 F_2 + X F_3 + F_4$$

où les F_i sont homogènes de degré i en (Y, Z, T) . Par ailleurs comme le plan H' est tangent à \mathcal{K}^\vee le long de la conique C_2 , on a $F_4 = C_2^2$ (on a ici encore noté C_2 l'équation de la conique C_2). On écrit alors le point x sous la forme (a, b, c, d) , la surface W a pour équation

$$a \frac{\partial F}{\partial X} + b \frac{\partial F}{\partial Y} + c \frac{\partial F}{\partial Z} + d \frac{\partial F}{\partial T}.$$

L'équation de la courbe C' dans le plan H' est alors

$$a F_3 + b \frac{\partial F_4}{\partial Y} + c \frac{\partial F_4}{\partial Z} + d \frac{\partial F_4}{\partial T}.$$

L'application qui à x associe C' est donc linéaire. Elle va d'un espace projectif de dimension 3 dans un autre. Nous montrons qu'elle est bijective : son image est de dimension 3.

Si le point x est dans le plan H' , alors la courbe C' a pour équation (rappelons que $F_4 = C_2^2$) :

$$2C_2 \left(b \frac{\partial C_2}{\partial Y} + c \frac{\partial C_2}{\partial Z} + d \frac{\partial C_2}{\partial T} \right).$$

La courbe C' contient dans ce cas la conique C_2 et on obtient un plan de cubiques de cette manière. Par ailleurs lorsqu'on prend $x = (1, 0, 0, 0)$, l'équation de C' est alors simplement F_3 . Cette cubique ne contient pas C_2 car sinon la surface \mathcal{K}^\vee serait singulière de long de toute la conique C_2 . L'image est donc de dimension 3. \square

REMARQUE 2.5. — On a ainsi 16 isomorphismes linéaires — $\phi_{H'}$ pour chaque plan H' — entre le \mathbb{P}_3^\vee contenant \mathcal{K}^\vee et l'espace projectif de dimension 3, notons le $\mathbb{P}(N(Y))$, des cubiques du plan $\mathbb{P}(S^2(H^0 K_Y))$ passant par les six points $(x_k)_{k \in [1,6]}$. Chaque isomorphisme permet de définir une action de H sur $\mathbb{P}(N(Y))$ par $\phi_{H'} \sigma \phi_{H'}^{-1}$ pour $\sigma \in H$. Toutes ces actions sont les mêmes car on a $\phi_{\sigma(H')} = \phi_{H'} \circ \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in H$. On a donc une action bien définie de H sur $\mathbb{P}(N(Y))$

REMARQUE 2.6. — La variété des courbes de genre 5 non hyperelliptiques munies d'une involution sans point fixe et de variété de Prym $A = J(Y)$ est isomorphe (proposition 2.1) à l'ouvert $U(A)/H$ de \mathbb{P}_3^\vee/H . Elle est donc isomorphe à un ouvert de $\mathbb{P}(N(Y))/H$. Les orbites de cubiques de cet ouvert ne contiennent en particulier pas la conique comme composante.

Par ailleurs, la donnée de la conique canonique de $\mathbb{P}(S^2(H^0 K_Y))$ et des six points $(x_k)_{k \in [1,6]}$ permet de retrouver la courbe Y comme revêtement double de la conique ramifié aux 6 points.

La proposition 2.4 permet de réinterpréter l'ouvert $U(A)$ comme un ouvert de l'espace $\mathbb{P}(N(Y))$ des cubiques du plan $\mathbb{P}(S^2(H^0 K_Y))$ passant par les six points x_k pour $k \in [1, 6]$. Nous pouvons donc réinterpréter le fibré $\mathfrak{U}(\mathfrak{A}_2)$ au-dessus de \mathfrak{A}_2^i (les surfaces abéliennes indécomposées) comme un ouvert \mathbf{U} de la variété des courbes planes de degré 5 réunion d'une conique lisse et d'une cubique la coupant en 6 points distincts. Nous avons encore une action sur \mathbf{U} du fibré en groupe d'Heisenberg \mathfrak{H} au-dessus de \mathfrak{A}_2^d .

THÉORÈME 2.7. — *Les constructions précédentes décrivent un isomorphisme entre la variété \mathfrak{M}_5^i des courbes de genre 5 non hyperelliptiques munies d'une involution sans point fixe et la variété \mathbf{U}/\mathfrak{H} .*

Les orbites des courbes ne contiennent en particulier pas les courbes de degré 5 contenant une conique double.

REMARQUE 2.8. — Il existe une autre paramétrisation (voir par exemple [L]) de la variété \mathfrak{M}_5^i par les courbes planes de degré 5 réunion d'une conique A et d'une cubique B (sans théta-caractéristique). Cette paramétrisation fait intervenir des constructions classiques de géométrie plane et est fortement liée à la construction de [ACGH] : les coniques C_0 et A sont les mêmes, la cubique C_1 est la Hessienne de la cubique B et la courbe X est l'enveloppe d'un pinceau de coniques obtenu à partir de A et B .

3 Des plongements particuliers

Nous allons ici réaliser l'isomorphisme de la proposition 2.1 de manière géométrique, c'est-à-dire avec des courbes plongées. Nous montrerons ainsi que si $C \in \mathfrak{M}_5^i$, alors elle possède une famille de plongements particuliers qui caractérisent l'existence de l'involution sans point fixe.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Le cas $\mathfrak{M}_5^{i,i}$

Soit Y une courbe lisse de genre 2, on note A sa jacobienne et \mathcal{K} la surface de Kummer associée. Fixons \mathcal{L} un fibré inversible de degré 6 sur Y . On considère le plongement de C donné par \mathcal{L} dans $\mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$. On a toujours $h^0\mathcal{I}_Y(2) = 4$ (cf. [GLP]). On a donc un \mathbb{P}_3 de quadriques contenant Y . Remarquons que comme il n'y a pas de diviseur ξ de degré 3 sur Y tel que $h^0\xi = 3$, la courbe Y n'a jamais de trisécante dans \mathbb{P}_4 .

Notons \mathfrak{C} la sous-variété de \mathbb{P}_3 des quadriques singulières. C'est une variété déterminantielle dont la dimension attendue est 2 et le degré attendu 5.

PROPOSITION 3.1. — *La variété \mathfrak{C} est la réunion d'un plan et d'une surface de degré 4 isomorphe à \mathcal{K}^\vee . Le plan est le plan dual du point correspondant à $\mathcal{L} \in J(Y)$.*

Preuve — Nous décrivons toutes les quadriques Q contenant la courbe Y .

1. Si Q est de rang inférieur ou égal à 2, alors la quadrique est formée de la réunion de deux hyperplans ou d'un hyperplan double. La courbe Y est alors dégénérée ce qui est absurde.

2. Si Q est de rang 3, alors son noyau est une droite L de \mathbb{P}_4 . Cette droite rencontre Y en au plus 4 points sinon la courbe Y serait contenue dans un hyperplan (engendré par la droite et 2 autres points de Y). Soit donc x la longueur du schéma $Y \cap L$, on a $x = 0, 2$ ou 4 et considérons la projection de centre la droite L . Elle définit un morphisme de Y vers une conique.

2.1. Si $x = 4$, alors le morphisme est un isomorphisme ce qui est absurde (Y est de genre 2).

2.2. Si $x = 2$, le morphisme est de degré 2 et est donné par la composée du revêtement double $Y \rightarrow \mathbb{P}_1$ défini par K_Y avec le plongement de Veronese $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$. On a donc $\mathcal{L} = 2K_Y + D$ où D est le diviseur correspondant aux deux points de $L \cap Y$. Le diviseur D est alors déterminé et de degré 2. Les deux points de $L \cap Y$ sont donc uniquement déterminés sauf si $D = K_Y$.

2.2.1. Ainsi, si $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, alors L est unique (correspondant au diviseur effectif associé à $\mathcal{L} - 2K_Y$) et la quadrique est également unique.

2.2.2. Si par contre $\mathcal{L} = 3K_Y$, alors on a un \mathbb{P}_1 de choix pour la droite L (toutes les bisécantes qui coupent Y en deux points en involution), il y a donc le même \mathbb{P}_1 de quadriques.

2.3. Si $x = 0$, on a alors un morphisme de degré 3 de C vers \mathbb{P}_1 . Soit D le diviseur associé, on a $\deg D = 3$ et $h^0 D = 2$. Le morphisme vers la conique est donné par $Y \rightarrow \mathbb{P}(H^0 D) \xrightarrow{v} \mathbb{P}(S^2 H^0 D)$ où v est le plongement de Veronese. On a ici $\mathcal{L} = 2D$. Si D_0 est un tel diviseur, les autres diviseurs sont donnés par $D + M$ avec M une demi-période (i.e. $2M = 0$). On a donc un nombre fini de

tels diviseurs. La quadrique est alors déterminée par D . La droite L est le quotient de rang 2 suivant : $S^2(H^0 D) \rightarrow H^0(2D)$ et la conique l'image de $\mathbb{P}(H^0 D)$ dans $\mathbb{P}(S^2 H^0 D)$.

3. Il reste le cas général où la quadrique est de rang 4, le noyau de Q est alors un point P et on projette par rapport à ce point (notons π_P cette projection). On obtient alors un morphisme de Y vers une quadrique de \mathbb{P}_3 . Le morphisme $\pi_P|_Y$ est de degré 6 si $P \notin Y$ et de degré 5 sinon.

3.1. Supposons que $P \in Y$, la courbe $\pi_P(Y)$ est de degré divisant 5 dans \mathbb{P}_3 . Elle ne peut être de degré 1 sinon Y serait dégénérée. Elle est donc de degré 5 (et de genre 2) et est contenue dans une unique quadrique. Ceci nous donne une famille de dimension un de quadriques.

3.2. Reste le cas général où le point P n'est pas dans Y . L'image $\pi_P(Y)$ est alors une courbe de degré divisant 6, c'est à dire de degré 1, 2, 3 ou 6. De plus $\pi_P(Y)$ ne peut être plane sinon Y serait dégénérée. Donc $\pi_P(Y)$ est de degré 3 ou 6 irréductible et n'est pas plane.

3.2.1. Si $\deg(\pi_P(Y)) = 3$, alors la courbe $\pi_P(Y)$ est une cubique gauche et le morphisme $Y \rightarrow \pi_P(Y)$ est de degré 2 donné par le diviseur K_Y et la composition avec le plongement de Veronese $\mathbb{P}(H^0 K_Y) \rightarrow \mathbb{P}(S^3 H^0 K_Y)$. On a alors nécessairement $\mathcal{L} = 3K_Y$ et le point P est déterminé par le conoyau de $S^3 H^0 K_Y \rightarrow H^0(3K_Y)$. Dans ce cas $\pi_P(Y)$ est contenue dans un plan de quadriques qui se relève en un plan dans $\mathbb{P}(H^0 \mathcal{I}_Y(2)^\vee)$.

3.2.2. Si $\deg(\pi_P(Y)) = 6$, la projection $Y \rightarrow \pi_P(Y)$ est birationnelle. La courbe $\pi_P(Y)$ est de degré 6 contenue dans une quadrique lisse \overline{Q} et son genre géométrique est 2. Dans \overline{Q} , la classe de $\pi_P(Y)$ est (a, b) avec $a + b = 6$ et $(a - 1)(b - 1) \geq 2$. On a donc deux possibilités : $(a, b) = (2, 4)$ ou $(a, b) = (3, 3)$.

Si $(a, b) = (2, 4)$, la projection sur le premier facteur donne un morphisme φ de degré 2 de Y vers \mathbb{P}_1 (donc défini par K_Y). L'image réciproque d'un point du premier facteur de \overline{Q} dans C est une bisécante en involution. La quadrique Q contient donc la surface S recouverte par les bisécantes en involution. Cette surface est de degré 3. Une quadrique contenant Y contient S si et seulement si elle contient en plus un point x_0 de $S - C$. En effet, dans ce cas on a $C \cup \{x_0\} \subset S \cap Q$. Mais comme Q est de degré 2 et S de degré 3, on a $Q \cap S$ est une courbe de degré 6 ou $S \subset Q$. C'est donc que $S \subset Q$.

L'ensemble des quadriques contenant x_0 forme un plan dans $\mathbb{P}(H^0 \mathcal{I}_Y(2))$. Par ailleurs toutes ces quadriques sont singulières. En effet, si une de ces quadriques était lisse, la surface S serait alors intersection complète (sur une quadrique lisse de \mathbb{P}_4 , toute surface est intersection complète, car le groupe de Picard de la quadrique est \mathbb{Z}). C'est absurde car son degré (qui est 3) devrait alors être un multiple de celui de Q (qui est 2). Ceci nous donne le plan. Remarquons que si $\mathcal{L} = 3K_Y$, la surface S est un cône et le plan précédent a été décrit en 3.2.1.

Si $(a, b) = (3, 3)$, la courbe $\pi_P(Y)$ a deux points doubles. On a donc deux bisécantes passant par P . Soient ξ_1 et ξ_2 les diviseurs de degrés 2 définis par ces bisécantes. Comme elles sont concourrantes, on a $h^0(\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2) \geq 2$. Or $\deg(\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2) = 2$ donc $\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2 = K_Y$.

Ainsi pour tout couple de points de Y , on plutôt pour tout diviseur ξ de degré 2 sur Y , il existe un unique diviseur $\xi' = \mathcal{L} - K_Y - \xi$ tel que les deux bisécantes (si $\xi \neq \xi'$) définies par des

sections de ξ et ξ' se rencontrent en un point P . Il y a ici deux cas particuliers à traiter à part : lorsque ξ (ou ξ') est K_Y et lorsque $\xi = \xi'$.

En dehors de ces deux cas, la donnée du couple (ξ, ξ') définit deux bisécantes distinctes. Le point d'intersection P est donc bien défini. La projection de Y par P donne une courbe de degré 6 ayant deux points doubles. Elle est donc contenue dans une unique quadrique.

Si $(\xi, \xi') = (K_Y, \mathcal{L} - 2K_Y)$ ou symétriquement si $(\xi, \xi') = (\mathcal{L} - 2K_Y, K_Y)$, on a un \mathbb{P}_1 de bisécantes correspondant aux section de K_Y . Ces bisécantes rencontrent toutes la droite définie par $\mathcal{L} - 2K_Y$ et par projection par rapport à cette droite on retrouve les cas 2.2.1 et 2.2.2 où la quadrique est de rang 3 et où $x = 2$. Ainsi pour ces couples, on a alors un \mathbb{P}_1 de quadriques si $\mathcal{L} = 3K_Y$ et une unique quadrique si $\mathcal{L} \neq 3K_Y$.

Si enfin $\xi = \xi'$ (ie. si on a un point double de \mathcal{K}^\vee), les deux bisécantes sont alors confondues et les tangentes aux points d'intersection de cette bisécante avec Y se rencontrent. On peut alors choisir pour P n'importe quel point de la bisécante. La projection aura alors un tacnode et sera donc toujours contenue dans une unique quadrique. On a un \mathbb{P}_1 de quadriques.

Ainsi, un couple de diviseurs (ξ, ξ') définit un unique cône sauf pour les points en involution sur la jacobienne : les (ξ, ξ') pour lesquels on a un \mathbb{P}_1 de quadriques. La surface obtenue est donc isomorphe à la duale \mathcal{K}^\vee de la surface de Kummer \mathcal{K} de Y .

Montrons que le plan est bien le plan dual correspondant au point $\mathcal{L} \in \text{Pic}_6(Y)$. Déterminons l'intersection de ce plan et de la surface \mathcal{K}^\vee .

Si $\mathcal{L} = 3K_Y$, l'intersection recherchée est formée des quadriques du plan décrit en 3.2.1 qui sont de rang 3. Elles forment une conique double. Ce plan est donc le plan dual du point double de \mathcal{K} qui correspond à \mathcal{L} . Ces quadriques sont exactement les quadriques singulières dont le sommet rencontre Y .

Si $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, on a deux cas. Soit la quadrique a pour sommet une droite et on est dans la situation 2.2.1. Soit la quadrique a pour sommet un point et il doit appartenir à Y . On voit que chaque point de la courbe Y définit un point de l'intersection du plan et de \mathcal{K}^\vee , les deux points du diviseur $\mathcal{L} - 2K_C$ se contractant en un même point. L'intersection du plan et de \mathcal{K}^\vee est donc une courbe de degré 4 avec un point double dont la désingularisation est Y . C'est le plan dual du point \mathcal{L} . \square

REMARQUE 3.2. — Soit \mathcal{L} un diviseur de degré 6 sur Y une courbe de genre 2. *Se donner un point de \mathbb{P}_3^\vee correspond exactement à se donner un fibré vectoriel de rang 2 sur Y de déterminant \mathcal{L} .*

En effet, se donner un point du \mathbb{P}_3^\vee contenant \mathcal{K}^\vee revient à se donner une quadrique contenant la courbe Y dans le plongement $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$ (cf. proposition 3.1). Comme sur une quadrique de \mathbb{P}_4 il y a un fibré vectoriel de rang 2 tautologique, on a alors un fibré vectoriel de rang 2 et de déterminant \mathcal{L} sur Y .

Réciproquement si on a un fibré vectoriel E de rang 2 sur Y et de déterminant \mathcal{L} , alors on a une forme quadratique sur $\Lambda^2 H^0 E$ qui induit une forme quadratique sur $H^0(\Lambda^2 E) = H^0\mathcal{L}$. Cette forme quadratique correspond à une quadrique contenant Y et donc à un point de \mathbb{P}_3^\vee .

Cette remarque permet de redémontrer un résultat de Narasimhan et Ramanan décrivant

l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang 2 et degrés pair [NR]

3.1.2 Le cas $\mathfrak{M}_5^{i,d}$

Soit $A = E_1 \times E_2$ une surface abélienne décomposée où les E_i sont des courbes elliptiques avec un point marqué. Soit $Y = E_1 \cup E_2$ la réunion transversale des deux courbes de genre 1 se rencontrant en leur point marqué. Notons \mathcal{K} la surface de Kummer associée et fixons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2$ un diviseur de bidegré $(3, 3)$ sur Y . On plonge alors Y par \mathcal{L} dans $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L}) = \mathbb{P}_4$. On a toujours $h^0\mathcal{I}_Y(2) = 4$ et donc un $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_Y(2)^\vee)$ de quadriques contenant Y .

Notons Π_i le plan de \mathbb{P}_4 contenant E_i . Toutes les quadriques Q contenant Y contiennent les plans Π_i . Elles sont donc singulières et leur sommet contient le point $P = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Notons \mathfrak{C} la sous-variété des quadriques de rang inférieur à 3.

PROPOSITION 3.3. — *La variété \mathfrak{C} est isomorphe à la surface \mathcal{K}^\vee .*

Preuve — On effectue la projection à partir du point P et on arrive dans un espace projectif de dimension 3. Les courbes E_1 et E_2 (ainsi que les plans Π_1 et Π_2) ont pour images deux droites disjointes. On cherche toutes les quadriques de rang inférieur à 3 contenant ces deux droites.

Soit Q une telle quadrique et supposons qu'elle est de rang exactement 3. Soit alors x son sommet (c'est un point). On projette à partir de x , l'image de Q doit être une conique lisse et doit contenir l'image des deux droites. Ceci n'est jamais possible. La quadrique Q est donc réunion de deux plans chacun contenant l'une des deux droites.

Dans \mathbb{P}_4 les quadriques contenant Y sont les réunions de deux hyperplans l'un contenant Π_1 , l'autre contenant Π_2 . Ils forment une surface isomorphe à $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. On a un morphisme de $E_1 \times E_2$ vers cette surface : à un point de E_1 on associe l'hyperplan contenant Π_2 et ce point et de manière symétrique pour E_2 . On retrouve le recouvrement $E_1 \times E_2 \rightarrow \mathcal{K}^\vee$. \square

3.2 La courbe C de genre 5 revêtement double d'une courbe X de genre 3.

Nous traitons les cas de $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ et $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ en même temps. Soit Y la courbe de genre 2 précédente (lisse ou réunion de deux courbes elliptiques se coupant en un point) et A la surface abélienne correspondante. Soit \mathcal{L} le diviseur de degré 6 qui permet de plonger Y dans \mathbb{P}_4 , on choisit Q une quadrique de rang maximal contenant Y (lisse dans le premier cas et de rang 4 dans le second). Elle correspond à un point x du \mathbb{P}_3^\vee contenant \mathcal{K}^\vee . Nous construisons ici de manière plongée l'isomorphisme décrit à la proposition 2.1.

Nous définissons la courbe C . Notons A^\times l'ouvert des $\xi \in A$ tels que $\xi \neq K_Y$ (si Y est lisse) et $\xi \neq (P, y)$ ou (x, P) sinon. Alors $\xi \in A^\times$ définit une bisécante L_ξ de Y . Considérons la courbe $C \subset A$ définie de la manière suivante :

$$C = \overline{\{\xi \in A^\times / L_\xi \subset Q\}}.$$

LEMME 3.4. — *La courbe C est invariante sous l'involution $x \mapsto -x$ de A .*

Preuve — Dans le premier cas l'involution est donnée par $\xi \mapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi$. Soit $\xi \neq K_Y$ et supposons que $\xi \in C$, alors $L_\xi \subset Q$. Considérons maintenant $\xi' = \mathcal{L} - K_Y - \xi$, la bisécante $L_{\xi'}$ rencontre L_ξ . Mais alors $L_{\xi'}$ rencontre Q en trois points (les deux points de $L_{\xi'} \cap Y$ et le point de $L_{\xi'} \cap L$). Elle est donc contenue dans Q et on a $\xi' \in C$.

Dans le second cas l'involution est donnée sur chacune des courbes E_i par $x \mapsto y$ où y est le troisième point d'intersection de la droite (xP) avec la courbe E_i dans le plan Π_i (P est le point d'intersection des courbes E_i). Si L est une bisécante à Y contenue dans Q , la bisécante L' obtenue par l'involution à partir de L est contenue dans le plan $\Pi = (P, L)$. Mais P est dans le sommet de Q et $L \subset Q$ donc $\Pi \subset Q$ et donc $L' \subset Q$. La courbe C est même invariante par chacune des involutions des courbes E_i . \square .

REMARQUE 3.5. — On a pas a priori donné de condition pour que $\xi \in A^\times$ appartienne à C .

Dans le premier cas, si $\xi = K_Y$, on a un \mathbb{P}_1 de sections et donc autant de bisécantes. Ces bisécantes sont soit toutes en même temps contenues dans Q soit jamais contenues dans Q . Si $\mathcal{L} = 3K_Y$, toutes les bisécantes définies par K_Y se coupent en un même point. Ainsi le raisonnement précédent permet de montrer que si l'une est dans Q elles le sont toutes. Si par contre $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, alors les bisécantes définies par K_Y rencontrent toutes la même bisécante L_0 définie par le diviseur $\mathcal{L} - 2K_Y$. Ainsi si une de ces bisécante est dans Q , alors L_0 est contenue dans Q et par le raisonnement du lemme 3.4 elles sont toutes contenues dans Q .

Dans le second cas, $\xi = (x, P)$ (resp. (P, y)) est dans C si et seulement si le plan engendré par la tangente en P à la courbe E_2 (resp. E_1) et le point x (resp. y) est contenu dans Q .

Soit $\xi \in A$ et considérons L_ξ la bisécante de Y ainsi définie. On peut alors associer à L_ξ le plan H_ξ de $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_Y(2)^\vee) = \mathbb{P}_3^\vee$ des quadriques contenant $Y \cup L_\xi$. C'est bien un plan car pour qu'une quadrique contenant Y contienne L_ξ il suffit qu'elle contienne un point de plus de L_ξ . Le raisonnement de la remarque 3.5 permet de définir H_ξ même pour $\xi \in A^\times$.

LEMME 3.6. — *Le morphisme $A \rightarrow \mathbb{P}_3$ défini par $\xi \mapsto H_\xi$ est le morphisme de A dans \mathcal{K} .*

Preuve — Le raisonnement du lemme 3.4 permet de montrer que ce morphisme est invariant par l'involution sur A (et même par celles des E_i si Y n'est pas lisse).

Ce morphisme est bien à valeur dans \mathcal{K} car les plans de quadriques ainsi définis sont tangents à la variété $\mathcal{K}^\vee \subset \mathfrak{C}$ de quadriques singulières. En effet, dans des bases bien choisie les matrices des quadriques s'écrivent (dans chacun des cas) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & a & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & a & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ x & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ y & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & x & 0 & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix},$$

le lieu défini par le déterminant est bien singulier ce qui montre que l'on a un plan tangent à \mathcal{K}^\vee . On vérifie aisément que les fibres sont bien formées par les orbites sous l'involution (resp. les involutions). \square

Choisir une quadrique Q contenant Y revient à choisir un point x de \mathbb{P}_3^\vee . Lorsque Y est lisse, la quadrique Q définit un point de $U(A)$ si et seulement si elle ne contient aucune des 16 droites $(p_i q_i)_{i \in [1, 16]}$ avec $2(p_i + q_i) = \mathcal{L} - K_Y$.

La quadrique Q peut être singulière. Nous expliquons ces cas. Identifions $A = \text{Jac}(Y)$ avec $\text{Pic}^6(Y)$ en choisissant le diviseur $3K_Y$ pour origine. Ceci fixe un plan $H' \subset \mathbb{P}_3^\vee$ tangent à \mathcal{K}^\vee selon une conique. Soit $x \in U(A) \subset \mathbb{P}_3^\vee$ un relevé de $\bar{x} \in U(A)/H$ définissant une courbe de genre 5 et soit $\mathcal{L} \in \text{Pic}^6(Y)$. Alors, si l'image de \mathcal{L} dans \mathcal{K} n'est pas contenue dans x^\vee , la quadrique définie par Q est lisse, sinon elle est singulière. La quadrique est donc singulière exactement si $\mathcal{L} \in C \subset A$. Nous verrons que ces cas donnent des plongements particuliers de C . Remarquons que la courbe Y ne passe jamais par le sommet de Q car sinon Q définirait un point de \mathcal{K}^\vee (à l'intersection du plan tangent et de \mathcal{K}^\vee , cf. proposition 3.1) et donc pas un point de $U(A)$.

Dans le second cas, notons $(x_i)_{i \in [1, 4]}$ et $(y_j)_{j \in [1, 4]}$ les points fixes des involutions i_1 et i_2 . La quadrique Q définit un point de $U(A)$ si et seulement si Q est de rang 4 et ne contient aucune droite $(x_i y_j)$.

Nous définissons la courbe \tilde{X} comme l'image de C dans \mathcal{K} et la courbe X comme l'image réciproque de \tilde{X} dans $\tilde{\mathcal{K}}$. Supposons maintenant que Q définit un point de $U(A)$, alors

PROPOSITION 3.7. — *La courbe C est lisse de genre 5 et c'est un revêtement double non ramifié de la courbe X qui est lisse de genre 3.*

3.3 Des plongements particuliers de la courbe de genre 5

Nous avons vu que la donnée d'une surface abélienne A et d'un point $\bar{x} \in U(A)/H$ correspond à la donnée d'une courbe C de genre 5 munie d'une involution sans point fixe.

Nous montrons maintenant que la donnée du diviseur \mathcal{L} de degré 6 sur Y précédent définit un morphisme particulier de C vers un espace projectif de dimension 3. En effet, dans $\mathbb{P}(H^0 \mathcal{L})$ le point $x \in U(A)$ correspond à une quadrique Q (lisse ou de rang 4) contenant Y . Si Q est lisse, la variété de ses droites forme un espace projectif de dimension 3 que nous notons $\mathbb{P}(V)$.

Si Q est de rang 4, les droites de Q forment une fibration en \mathbb{P}_2 au dessus de \mathbb{P}_1 . Il existe deux contractions naturelles de cette fibration vers un espace projectif de dimension 3 que nous notons $\mathbb{P}(V_k)$ pour $k \in \{1, 2\}$. Elles contractent un $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ vers une droite L_k selon l'une ou l'autre des projections. La quadrique singulière peut alors être vue comme la variété des droites de $\mathbb{P}(V_k)$ qui rencontrent L_k .

Lorsque Y est lisse (cf. le cas 3.2.2, $(a, b) = (2, 4)$), on note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif $\mathbb{P}(V_k)$ tel que les (α) -plans rencontrent Y en 2 points.

Lorsque Y est singulière, les plans Π_1 et Π_2 sont des (α) -plans pour un des $\mathbb{P}(V_k)$ et des (β) -plans pour l'autre. Notons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif $\mathbb{P}(V_k)$ tel que les plans Π_i soient des (α) -plans.

Dans tous les cas on a donc un morphisme de C vers un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3.

PROPOSITION 3.8. — (1) *Lorsque Y et Q sont lisses, la courbe C est plongée dans $\mathbb{P}(V)$, elle*

est de degré 8 et a une infinité de quadrisécantes.

(ii) Lorsque Y est lisse mais Q de rang 4, la courbe C est plongée dans $\mathbb{P}(V)$ et est de degré 7. Il existe une droite L telle que la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.

(iii) Lorsque Y est réunion de deux courbes elliptiques, l'image \overline{C} de la courbe C dans $\mathbb{P}(V)$ est de degré 8 et de genre arithmétique 7. Elle est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques. Elle a deux points doubles situés aux sommets des cônes.

Preuve — (i) La courbe C est définie comme les points $\xi \in A$ tels que la bisécante L_ξ à Y définie par ξ est contenue dans la quadrique Q . Nous définissons donc le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}(V)$ par $\xi \mapsto L_\xi$. Ce morphisme est à priori défini lorsque $\xi \neq K_Y$ mais nous pouvons le prolonger, si besoin est, en ce point car C est une courbe lisse (ce cas apparaît lorsque Q est singulière).

Soit $p \in Y$, ce point définit une droite ℓ_p de $\mathbb{P}(V)$. Cette droite est quadrisécante à l'image de C dans $\mathbb{P}(V)$. En effet, on cherche les points $q \in Y$ tels que la droite (pq) soit contenue dans Q . Il faut donc que q soit dans l'orthogonal de p pour la quadrique. Cet hyperplan rencontre C en 6 points et est tangent à C en p . Il reste donc 4 autres points qui donnent 4 points de l'image de C dans $\mathbb{P}(V)$ qui sont situés sur ℓ_p .

La courbe Y définit dans $\mathbb{P}(V)$ une surface réglée (l'ensemble des droites ℓ_p pour $p \in Y$). L'image de C dans $\mathbb{P}(V)$ est exactement le lieu singulier de cette surface. En effet, soit $\xi \in C$, on a $\xi = p + q$ et l'image de ξ dans $\mathbb{P}(V)$ est à l'intersection des droites ℓ_p et ℓ_q . Réciproquement si un point z de $\mathbb{P}(V)$ est dans le lieu singulier de la surface, alors il est sur deux droites ℓ_p et ℓ_q , la droite de \mathbb{P}_4 que z définit est alors contenue dans Q et coupe C en p et q . Le point z est donc dans l'image de C .

Nous savons alors que la courbe image de C dans $\mathbb{P}(V)$ est de degré 8 et de genre arithmétique 5 (cf. [Kl]). On a donc bien un plongement qui est de degré 8. La variété des quadrisécantes de C dans ce plongement est la courbe Y .

(ii) Notons \overline{C} l'image de C . La quadrique Q est l'ensemble des droites rencontrant une droite L . Soit S la surface réglée définie par Y et C' son lieu singulier. Un point y de L définit un (α) -plan contenu dans Q . Il rencontre Y en deux points y_1 et y_2 en involution. Ainsi le point y est à l'intersection des droites ℓ_{y_1} et ℓ_{y_2} . La droite L est donc contenue dans C' . Par ailleurs, le même raisonnement que précédemment montre que $\overline{C} \subset C'$ et que les points de C' sont donnés par les bisécantes de Y contenues dans Q (la différence par rapport à la situation précédente est le fait que le point $\xi = K_Y$ définit un \mathbb{P}_1 — qui donnera L — de bisécantes supplémentaires). On a donc $C' = \overline{C} \cup L$. Le genre de \overline{C} est supérieur ou égal à celui de C et par les résultats de [Kl], le genre de C' est 5. On a deux cas : \overline{C} est de genre 6 et ne rencontre pas L ou \overline{C} est de genre 5 et rencontre L en un point. La courbe \overline{C} rencontre L : en effet, le point K_Y est limite de points $\xi \in C$ donc la limite des droites L_ξ est une droite définie par K_Y donc une droite qui rencontre L . La courbe \overline{C} est donc de genre 5, c'est la courbe C . La courbe C' est isomorphe à l'image réciproque de $C \subset J(Y)$ dans $\text{Pic}^2(Y)$ (qui est l'éclatement du point K_Y). Remarquons que dans cette situation, les plongements sont obtenus à partir du plongement canonique K_C par projection à partir d'un point de C . Tous les points de C donnent un tel plongement.

(iii) En décrivant la quadrique comme la variété des droites de $\mathbb{P}(V)$ qui rencontrent un

droite L , on voit que la courbe \overline{C} est sur l'intersection des deux cônes cubiques définis par les courbes E_i . Ces deux cônes ont une droite en commun car les courbes E_i se coupent en un point. La courbe résiduelle doit alors être de degré 8 et de genre arithmétique 7. Elle a deux points doubles. Chaque point double correspond aux points de C de la forme (x, P) et (P, y) (P est le point d'intersection de E_1 et E_2). Les deux points doubles sont donc aux sommets des cônes \square

REMARQUE 3.9. — Lorsque Y est lisse et Q lisse (resp. de rang 4), la courbe C (resp C') plongée dans $\mathbb{P}(V)$ n'est pas contenue dans une surface cubique. En effet, supposons que c'est le cas et soit S une telle surface. Alors S rencontre toutes les quadrisécantes de C (resp. C') en quatre points donc S contient toutes les quadrisécantes de C (resp. C'). La surface S contient donc la surface réglée définie par Y , cette dernière est de degré 6, c'est absurde.

Nous montrons maintenant une réciproque à cette proposition dans chacun des deux cas :

PROPOSITION 3.10. — *Soit \overline{C} une courbe de $\mathbb{P}(V)$ de degré 8 et de genre géométrique 5 qui est liée à une droite par une intersection de deux cônes cubiques et qui a deux points doubles aux sommets des cônes, alors le modèle non singulier C de \overline{C} est dans $\mathfrak{M}_5^{i,d}$.*

Preuve — Soit L la droite comune aux deux cônes cubiques. Soient E_1 et E_2 les deux courbes elliptiques de la grassmannienne qui définissent ces cônes. La droite L correspond au point d'intersection des E_i .

Considérons l'incidence point/plan suivante :

$$I = \{(p, h) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)^\vee / p \in h \text{ et } L \subset h\}.$$

La variété I paramètre les droites de la quadrique singulière

$$Q = \{l \in \mathbb{G}(2, \mathbb{P}(V)) / l \cap L \neq \emptyset\}.$$

Notons $A = E_1 \times E_2$, pour tout $\xi \in A^\times$, on peut définir un élément L_ξ de I comme étant la droite passant par les deux points de ξ . On a vu que la courbe

$$C = \overline{\{\xi \in A^\times / L_\xi \subset Q\}}$$

est alors lisse de genre 5. Elle s'envoie sur \overline{C} et on peut utiliser la construction précédente. \square

PROPOSITION 3.11. — *Soit C une courbe projective de genre 5 et de degré 8 de \mathbb{P}_3 . Supposons que C est lisse, irréductible et non hyperelliptique ou réunion d'une courbe lisse C' de degré 7 et d'une droite L la rencontrant en un point. On suppose que C admet une infinité de droites quadrisécantes, alors $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$.*

La courbe Y des quadrisécantes de C est lisse de genre 2 et de degré 6 (dans la grassmannienne). La courbe C peut être retrouvée à partir de la courbe Y grâce à la construction précédente.

Preuve — Remarquons que comme C' est lisse de degré 7 et de genre 5, elle est alors non trigonale (cf [H] exemple 6.4.2).

Nous commençons par remarquer que C ne peut être contenue dans une surface cubique. En effet, soit S une telle surface, la surface S rencontre toutes les quadrisécantes de C en au moins 4 points. Elle contient donc toutes les quadrisécantes de C . La surface S contient ainsi la surface réglée S' des quadrisécantes de C . La surface S' ne peut être un plan. Si la surface S' était une quadrique lisse, alors C serait lisse et hyperelliptique.

Si S' est un cône, alors C passe par le sommet si et seulement si elle est singulière. Mais alors C' est trigonale (projection par le sommet de degré 3 vers \mathbb{P}_1). Elle est donc lisse et ne passe pas par le sommet. La projection à partir de celui-ci donne un morphisme de degré 4 de C vers une conique plane. Les quadrisécantes coupent donc C en exactement 4 points. On relève alors C dans le modèle non singulier de S' (l'éclatement du cône en son sommet qui est une surface rationnelle F_2). On écrit $[C] = af + bh$ où f est la classe d'une fibre et h est la classe d'une section, voir par exemple [B2]. On a les intersections $f^2 = 0$, $f \cdot h = 1$ et $h^2 = 2$. Comme C ne passe pas par le sommet du cône, sa transformée stricte ne rencontre pas le diviseur exceptionnel E dont la classe est $h - 2f$. On a donc $a = [C] \cdot [E] = 0$. Par ailleurs C rencontre les fibres (les quadrisécantes en exactement 4 points donc $b = [C] \cdot f = 4$). On a donc $[C] = 4h$ ce qui donne par la formule d'adjonction

$$2g(C) - 2 = [C] \cdot ([C] + K) = 4h(4h - 2h) = 16.$$

Ceci donne $g(C) = 9$, c'est absurde.

Nous pouvons donc supposer que S est la surface réglée des quadrisécantes. Le théorème de Segre (cf. [GP1] p.412) nous dit alors que si σ est le genre de la courbe de base de S et si C (resp. C') rencontre les règles de S avec multiplicité k , alors on a

$$2g(C) - 2 = (k - 1)(2 \deg(C) - k \deg(S)) + k(2\sigma - 2)$$

et la même formule avec C' . Le genre σ est 0 ou 1 ce qui donne

$$3k^2 - 17k + 24 = 0 \quad \text{ou} \quad 3k^2 - 19k + 24 = 0 \quad \text{pour } C \text{ lisse}$$

$$\text{et } 3k^2 - 15k + 22 = 0 \quad \text{ou} \quad 3k^2 - 17k + 22 = 0 \quad \text{pour } C'.$$

La seule solution entière pour C lisse est pour $\sigma = 0$, on a alors $k = 3$ ce qui est impossible car les règles sont des quadrisécantes à C donc $k \geq 4$. Pour C' la seule solution entière est pour $\sigma = 1$ ce qui donne $K = 2$ ce qui est encore impossible, les règles sont des tridécantes à C' .

Nous montrons maintenant le

LEMME 3.12. — *La courbe n'a pas de quintisécante et il existe une surface de degré inférieur ou égal à sept singulière le long de C .*

Preuve — On peut mettre une structure de variété sur la famille des quadrisécantes (cf. [GP2] ou [ACGH]). L'hypothèse signifie qu'il existe une courbe de la grassmanienne des droites de \mathbb{P}_3 correspondant à des quadrisécantes de C . La courbe C n'a pas de 5-sécante. En effet, si D est une 5-sécante, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-Z) \rightarrow \mathcal{O}_{C \cup D} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

où $Z = C \cap D$. Il en résulte la suite exacte longue

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(3h - Z)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C \cup D}(3)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D(3)) \rightarrow 0$$

où h est la classe d'une section plane de C et donc que $H^0(\mathcal{O}_{C \cup D}(3)) = 19$. On en déduit que $C \cup D$ est sur une surface cubique ce qui est absurde.

Il existe une surface de degré inférieur ou égal à 7 singulière le long de C . En effet, comme C n'est pas sur une cubique, on a $h^1\mathcal{I}_C(3) = 0$. De plus $h^2\mathcal{I}_C(2) = h^1\mathcal{O}_C(2) = 0$ et $h^3\mathcal{I}_C(1) = 0$. Le faisceau \mathcal{I}_C est donc 3-régulier ce qui impose que $\mathcal{I}_C(4)$ est engendré par ses sections (cf [Mu1]). On a donc une surjection $\mathcal{O}_C(3) \rightarrow (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)$ et comme $h^1\mathcal{O}_C(3) = 0$, on en déduit que $h^1((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = 0$ et donc $h^0((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = \chi((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = 64$. On a donc $h^0(I_C^2(7)) \geq 4$. Il existe donc une surface de degré inférieur ou égal à 7 singulière le long de C . Cette surface contient toutes les quadrisécantes de C . \square

LEMME 3.13. — *Si deux quadrisécantes l et l' de C se coupent en un point p alors p appartient à C . Les droites l et l' et la tangente à C en p ne sont pas coplanaires.*

Preuve — Si $p \notin C$, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-(C \cap (l \cup l'))) \rightarrow \mathcal{O}_{C \cup l \cup l'} \rightarrow \mathcal{O}_{l \cup l'} \rightarrow 0.$$

Après tensorisation par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$, on obtient $h^0(\mathcal{O}_C(3h - p_1 - \dots - p_4 - q_1 - \dots - q_4)) = 12$ et $h^0(\mathcal{O}_{l \cup l'}(3)) = 7$. Il en résulte que $h^0(\mathcal{O}_{C \cup l \cup l'}(3)) = 19$ donc $C \cup l \cup l'$ est sur une surface cubique ce qui est absurde. On a ici noté $l \cdot C = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ et $l' \cdot C = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$.

Si le plan engendré par l et l' est tangent à C en p , toute surface contenant l et l' est tangente à C en p et on conclut comme précédemment avec $l \cdot C = p + p_1 + p_2 + p_3$ et $l' \cdot C = p + q_1 + q_2 + q_3$ et en considérant $h^0(\mathcal{O}_C(3h - 2p - p_1 - p_2 - p_3 - q_1 - q_2 - q_3))$. On peut, de la même manière, montrer que par un point de C il ne passe pas trois quadrisécantes. \square

Soit \bar{S} la surface réglée engendrée par la courbe Y des quadrisécantes.

LEMME 3.14. — *La courbe C est le lieu singulier de la surface \bar{S} qui est de degré 6. La courbe Y est lisse et de genre 2.*

Preuve — Le degré de \bar{S} est inférieur ou égal à 7 d'après le lemme 3.12 et est supérieur ou égal à quatre. Soit Y la courbe des quadrisécantes. Elle est irréductible sinon l'une de ses composantes donne une surface de degré inférieur à 3 contenant C . Remarquons que si Y est plane alors \bar{S} est un cône et soit x son sommet. Si C est lisse et $x \notin C$, alors la projection à partir de x est un morphisme de degré 4 (car les quadrisécantes passent par x), son image est donc de degré 2 et C est sur un cône, c'est impossible. Si $x \in C$ et C lisse, alors le morphisme de projection doit être degré au moins 3 et diviser 7, il est donc de degré 7, son image est alors de degré 1 et C serait plane, absurde. Si C n'est pas lisse et $x \notin C'$ alors la projection de C' à partir de x est de degré au moins 3 (car les droites sont au moins trisécantes), elle est donc de degré 7 ce qui impose que C' est plane, c'est absurde. Si $x \in C'$, la projection est encore au moins de degré 3. Si elle est de degré 3 alors on a un \mathbf{g}_3^1 sur C' , c'est absurde. Elle doit donc être de degré 6 et C' plane, c'est encore impossible. Ainsi Y n'est pas plane.

Le lieu singulier de \bar{S} est contenu dans C d'après le lemme précédent, il est donc de degré 0, 1, 7 ou 8. Soit n le degré de Y et p son genre géométrique. Les résultats de [Kl] nous disent que le lieu singulier de \bar{S} est alors de degré $(n-1)(n-2)/2 - p$ qui vaut $3-p$, $6-p$, $10-p$ ou $15-p$ selon les valeurs de $n \in [4, 7]$. De plus ce degré doit appartenir à $\{0, 1, 7, 8\}$. Mais comme Y n'est pas contenue dans un plan et est irréductible la formule de Castelnuovo (cf. [ACGH] p.116) nous donne une borne sur p qui est 1, 2, 4 ou 6 selon les valeurs de n . Ainsi le degré du lieu singulier est contenu dans $[2, 3]$, $[4, 6]$, $[6, 10]$ ou $[9, 15]$ et dans $\{0, 1, 7, 8\}$. Les seules valeurs possibles sont 7 ou 8 avec $n = 6$ et $p = 3$ ou 2.

Soit \tilde{Y} le modèle lisse de Y . Le lieu singulier de \bar{S} peut être vu comme une courbe dans $\text{Div}_2(\tilde{Y})$ dont le genre arithmétique est P avec $2P - 2 = (n-5)(n+2p-2)$ (cf. [A]). Ceci nous donne $P = 6$ si $p = 3$ ou $P = 5$ si $p = 2$. Le premier cas est impossible. Ainsi Y est de degré 6 et de genre géométrique 2. On peut calculer (cf. [Kl]) que la surface n'a pas de point triple.

Il reste à montrer que Y est lisse. Si Y n'est pas lisse, alors $p_a(Y) \geq 3$ et Y est contenue dans l'intersection de la grassmannienne avec un espace projectif de dimension 3. Si cette intersection est lisse c'est une quadrique formée des droites rencontrant deux droites L_1 et L_2 . Les deux droites sont alors dans le lieu singulier, c'est impossible. Si l'intersection est singulière, on peut supposer que c'est un cône (car Y n'est pas plane). Mais alors un calcul dans la surface F_2 modèle non singulier de ce cône montre que le genre géométrique de Y doit être 3 ou 4. C'est impossible donc Y est lisse. \square

Preuve de la proposition 3.11 : Notons \mathbb{G} la grassmannienne des droites de \mathbb{P}_3 , on voit \mathbb{G} comme une quadrique de \mathbb{P}_5 par le plongement de Plücker. Notons E la restriction du quotient tautologique de \mathbb{G} à Y . Le modèle non singulier de \bar{S} est $\mathbb{P}_Y(E)$.

Soit $\mathcal{L} = \Lambda^2 E = \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)|_C$, c'est un fibré de degré 6. L'espace $\mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(H^0 \mathcal{L})$ est un hyperplan de \mathbb{P}_5 . La courbe Y est contenue dans la quadrique Q découpée par \mathbb{G} dans \mathbb{P}_4 .

La courbe C est isomorphe à la courbe suivante de Y_2 le carré symétrique de Y :

$$\tilde{C} = \{(x, y) \in Y_2 \mid (xy) \subset Q\}.$$

En effet, on définit un morphisme $\tilde{C} \rightarrow C$ par $(x, y) \mapsto \ell_x \cap \ell_y$ où ℓ_x (resp. ℓ_y) désigne la droite de \mathbb{P}_3 correspondant à x (resp. y). Ce morphisme est bien défini car si on a $(xy) \subset Q$, alors les droites ℓ_x et ℓ_y se rencontrent et on a (d'après le lemme 3.13) un point de C . On définit une réciproque $C \rightarrow \tilde{C}$ par $z \mapsto (x, y)$ où x et y sont les deux quadrisécantes passant par z (il y en a exactement deux car la surface n'a pas de point triple).

Nous sommes dans la situation de la proposition 3.8. En particulier on a une involution i sur \tilde{C} (vue dans $\text{Pic}_2(Y)$) donnée par $\xi \mapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi$ (cf. proposition 3.1). Elle est donnée sur C de la manière suivante : soit $z \in C$, il existe deux quadrisécantes L_1 et L_2 passant par z . Soit alors H le plan engendré par ces quadrisécantes, le plan H rencontre C en 8 points dont 7 sont sur $L_1 \cup L_2$. Le huitième point est $i(z)$. L'involution est sans point fixe. En effet, si $z = i(z)$, ceci signifie que H est tangent à C en z et H contient L_1 et L_2 . C'est exclu par le lemme 3.13. \square

REMARQUE 3.15. — Dans [M], S. Mukai donne une version du lemme 3.12.

Ces résultats nous permettent de donner une nouvelle caractérisation géométrique des courbes de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3 :

THÉORÈME 3.16. — *Soit C une courbe lisse de genre 5.*

(1) Première caractérisation : *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement \mathcal{M} de degré 8 de C dans \mathbb{P}_3 pour lequel la courbe C a une infinité de quadrisécantes.*

Seconde caractérisation : *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement \mathcal{M}' de degré 7 de C dans \mathbb{P}_3 et une droite L rencontrant C en un point pour lesquels la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.*

Dans cette situation, la courbe Y des quadrisécantes est la même quelque soit le plongement, elle est lisse de genre 2 et telle que $J(Y) = \text{Prym}(C)$. Notons \mathfrak{J}_0 les diviseurs \mathcal{M} de degré 8 du premier type, \mathfrak{J}_1 les diviseurs \mathcal{M}' de degré 7 du second type et \mathfrak{J} la réunion de ces ensembles. Il y a un morphisme $\mathfrak{J} \rightarrow J(Y)$ qui est un fibré principal homogène de groupe H .

(11) *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,d}$ si et seulement s'il existe un morphisme de C dans \mathbb{P}_3 tel que son image \overline{C} est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques, de degré 8 et a deux points doubles aux sommets des cônes.*

Dans cette situation, notons \mathfrak{J} les diviseurs de degré 8 de C qui définissent de tels morphismes. On a un morphisme $\mathfrak{J} \rightarrow E_1 \times E_2$ qui est un fibré principal homogène de groupe H (les E_i sont les courbes elliptiques définissant les cônes cubiques).

Preuve — Les caractérisations de $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ et $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ découlent des propositions 3.8, 3.10 et 3.11. Nous décrivons les ensembles \mathfrak{J} de plongements.

(1) Plaçons nous dans le cas $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ et notons $A = J(Y)$ la variété de Prym associée. la proposition 3.11 nous dit que si on a un plongement $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}$ de la courbe C , alors la courbe Y est munie d'un plongement \mathcal{L} de degré 6 (le plongement de Plücker) et d'une quadrique Q la contenant (la grassmannienne). La courbe C fixe un point $\overline{x} \in U(A)/H$ et la quadrique Q définit un relèvement $x \in U(A)$ de ce point. On a donc un morphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &\rightarrow A \\ \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{L}. \end{aligned}$$

La proposition 3.8 nous dit que ce morphisme est surjectif et que sa fibre est donnée par les quadriques Q qui relèvent \overline{x} , c'est-à-dire par le groupe H des éléments d'ordre 2 de A .

Le morphisme $\mathfrak{J} \rightarrow A$ est le morphisme $\text{Im}(1-i) \xrightarrow{1-i} \text{Im}(1-i)$ ou enore le morphisme $J(Y) \xrightarrow{2} J(Y)$. Remarquons enfin que l'ensemble \mathfrak{J}_1 des diviseurs du second type est isomorphe à la courbe C : ce sont les projections du plongement canonique de C par un point de C . \mathfrak{J}_1 est donc l'image du plongement de C dans $J(Y)$.

Le même raisonnement donne le cas (11). □

Références

[A] Jean d'Almeida : Lieu singulier d'une surface réglée. Bull. Soc. Math. de France, 118 (1990).

- [ACGH] *Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths et Joe Harris* : Geometry of algebraic curves. Vol. I. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [B1] *Arnaud Beauville* : Prym varieties and the Schottky problem. *Invent. Math.* 41 (1977), no. 2.
- [B2] *Arnaud Beauville* : Surfaces algébriques complexes. *Astérisque*, No. 54. SMF Paris, 1978.
- [DK] *Igor Dolgachev et Vassil Kanev* : Polar covariants of plane cubics and quartics. *Adv. Math.* 98 (1993), no. 2.
- [Do1] *Ron Donagi* : The tetragonal construction. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 4 (1981), no. 2.
- [Do2] *Ron Donagi* : The fibers of the Prym map. *Curves, Jacobians, and abelian varieties* (Amherst, MA, 1990), *Contemp. Math.*, 136, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [DS] *Ron Donagi et Roy Smith* : The structure of the Prym map. *Acta Math.* 146 (1981), no. 1-2.
- [GLP] *Laurent Gruson, Robert Lazarsfeld et Christian Peskine* : On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves. *Invent. Math.* 72 (1983), no. 3.
- [GP1] *Laurent Gruson et Christian Peskine* : Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 15 (1982), no. 3.
- [GP2] *Laurent Gruson et Christian Peskine* : Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes. *Enumerative geometry and classical Algebraic Geometry Progress in Math.*, Birkhauser (1982), pp. 1–32.
- [H] *Robin Hartshorne* : *Algebraic Geometry*. GMT 52, Springer (1977).
- [Hu] *Ronald W.H.T. Hudson* : *Kummer's quartic surface*. With a foreword by W. Barth. Revised reprint of the 1905 original. *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [K] *Pavel I. Katsylo* : On the unramified 2-covers of the curves of genus 3. *Algebraic geometry and its applications* (Yaroslavl, 1992), 61–65, *Aspects Math.*, E25, Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [Kl] *Steven L. Kleiman* : The enumerative theory of singularities. *Real and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), pp. 297–396. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [L] *David Lehavi* : Any smooth plane quartic can be reconstructed from its bitangents. *math.AG/0111017*, 2001.
- [M] *Shigeru Mukai* : *Curves and Grassmannians*. *Algebraic Geometry and Related Topics*. Proceeding of the International Symposium, Inchoen, Republic of Korea (1992).
- [Mu1] *David Mumford* : *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. *Annals of Mathematics Studies*, No. 59 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966.
- [Mu2] *David Mumford* : On the equations defining abelian varieties. I. *Invent. Math.* 1 (1966).

- [Mu3] *David Mumford* : Tata lectures on theta. III. With the collaboration of Madhav Nori and Peter Norman. Progress in Mathematics, 97. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [Mu4] *David Mumford* : Prym varieties. I. Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), pp. 325–350. Academic Press, New York, 1974.
- [NR] *Mudumbai S. Narasimhan et S. Ramanan* : Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math. (2) 89 1969.
- [OSS] *Christian Okonek, Michael Schneider et Heinz Spindler* : Vector bundles on complex projective spaces, Basel, Boston, Stuttgart : Birkhäuser (1980).
- [S] *Christoph Sorger* : Thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse. J. Reine Angew. Math. 435 (1993).
- [V] *Alessandro Verra* : The fibre of the Prym map in genus three. Math. Ann. 276 (1987), no. 3.
- [W1] *Charles T.C. Wall* : Nets of quadrics, and theta-characteristics of singular curves. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 289 (1978), no. 1357.
- [W2] *Charles T.C. Wall* : Geometric invariant theory of linear systems. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1983), 93.

JEAN D'ALMEIDA

Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59665 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

LAURENT GRUSON

Université de Versailles
45 avenue des États-Unis
F-78035 Versailles, France.

NICOLAS PERRIN

Institut de Mathématiques de Jussieu
175 rue du Chevaleret
F-75013 Paris, France.